SIMULTANEOUS EXTENSIONS OF SELBERG AND BUZANO INEQUALITIES (Operator monotone functions and related topics)

藤井, 正俊; 松本, 明美; 富永, 雅

数理解析研究所講究録
第1893巻2014年151-158

SIMULTANEOUS EXTENSIONS OF SELBERG AND BUZANO INEQUALITIES

Masatoshi Fujii
Osaka Kyoiku University
mfujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

Akemi Matsumoto
Nose senior high School
m@nose.osaka-c.ed.jp

Masaru Tominaga
Osaka Kyoiku University
tommy@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

ABSTRACT. 本稿では、次の通り Selberg 不等式と Buzano 不等式の同時拡張を与える: 直交条件 $\langle y_k, z_i\rangle = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n$、$k = 1, 2)$ を満たす Hilbert space $\mathscr{H}$ 上の y_1, y_2 と 0 でない元 $\{z_i; i = 1, 2, \ldots, n\}$ に対して

$$|\langle x, y_1\rangle \langle x, y_2\rangle| + \mathcal{B}(y_1, y_2) \sum_i \frac{|\langle x, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j\rangle|} \leq \mathcal{B}(y_1, y_2) \|x\|^2$$

が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。但し、$\mathcal{B}(y_1, y_2) := \frac{1}{2}(\|y_1\| \|y_2\| + |\langle y_1, y_2\rangle|)$ である。
応用として、Heinz-Kato-Furuta 不等式の改良についても議論する。

1. はじめに

本稿において $\mathscr{H}$ を Hilbert space とする。[8] で K. and F. Kubo は、Bessel 不等式の拡張としての Selberg 不等式を発掘し、Geršgorin 定理を用いることにより簡潔にそれを証明した:

Selberg 不等式. $\mathscr{H}$ 上の 0 でない元 $\{z_i; i = 1, 2, \ldots, n\}$ に対して

$$\sum_i \frac{|\langle x, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j\rangle|} \leq \|x\|^2 \tag{SI}$$

が、任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。

Selberg 不等式と Heinz-Kato-Furuta 不等式との同時拡張を与えるために [3] では、次の結果が導かれた:

Lemma A. $y \in \mathscr{H}$ が 0 でない元 $\{z_i; i = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathscr{H}$ に対して $\langle y, z_i\rangle = 0$ を満たすとき

$$|\langle x, y\rangle|^2 + \sum_i \frac{|\langle x, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j\rangle|} \|y\|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \tag{1.1}$$

が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。

これは、Schwarz 不等式と Selberg 不等式の同時拡張とみなせる。

次に Buzano 不等式 (BI) を提示する:

$$|\langle x, y_1\rangle \langle x, y_2\rangle| \leq \frac{1}{2}(\|y_1\| \|y_2\| + |\langle y_1, y_2\rangle|) \|x\|^2. \tag{BI}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A63.
Key words and phrases. Selberg inequality, Buzano inequality, Heinz-Kato-Furuta inequality and Furuta inequality.

これは、$y_1 = y_2$ のとき Schwarz 不等式である。

本稿では、Selberg 不等式と Buzano 不等式の同時拡張として、Lemma A の拡張を導く。これを用いて、Heinz-Kato-Furuta 不等式の改良についても議論する。

2. Selberg 不等式と Buzano 不等式の同時拡張

初めに、Buzano 不等式とその等号条件を与える。簡素化のため、$y_1, y_2 \in \mathscr{H}$ に対して、$\mathcal{B}(y_1, y_2)$ を次のように定める:

$$\mathcal{B}(y_1, y_2) := \frac{1}{2}(\|y_1\| \|y_2\| + |\langle y_1, y_2\rangle|).$$

Lemma 2.1. y_1, y_2 を $\mathscr{H}$ の元とする。このとき、次の (BI) が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ:

$$|\langle x, y_1\rangle \langle x, y_2\rangle| \leq \mathcal{B}(y_1, y_2) \|x\|^2.$$

更に、$\{y_1, y_2\}$ が線形独立ならば、(BI) の等号が $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ必要十分条件は、$x = a(\|y_2\| y_1 + e^{i\theta} \|y_1\| y_2)$ となるスカラー a が存在することである。但し、$\theta = \arg \langle y_1, y_2\rangle$ とする。また、$\{y_1, y_2\}$ が線形従属ならば、(BI) の等号が $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ必要十分条件は、$x = ay_1$ となるスカラー a が存在することである。

Proof. 不等式 (BI) の証明を確認する。$\|x\| = 1$ を仮定する。このとき

$$\begin{aligned}
|\langle y_1, x\rangle \langle x, y_2\rangle| &= \left|\left\langle \langle y_1, x\rangle x - \frac{1}{2}y_1, y_2 \right\rangle + \frac{1}{2}\langle y_1, y_2\rangle\right| \\
&\leq \left|\left\langle \langle y_1, x\rangle x - \frac{1}{2}y_1, y_2 \right\rangle\right| + \frac{1}{2}|\langle y_1, y_2\rangle| \\
&\leq \left\|\langle y_1, x\rangle x - \frac{1}{2}y_1\right\| \|y_2\| + \frac{1}{2}|\langle y_1, y_2\rangle| \\
&= \frac{1}{2}\|y_1\| \|y_2\| + \frac{1}{2}|\langle y_1, y_2\rangle| \\
&= \mathcal{B}(y_1, y_2).
\end{aligned}$$

さて $\{y_1, y_2\}$ が線形独立であると仮定する。ここで、(BI) の等号が成り立つ必要十分条件は、上記不等式の等号が成り立つことである。その一つ目 (resp. 二つ目) の不等式の等号が成り立つための必要十分条件は

$$\arg \langle 2\langle y_1, x\rangle x - y_1, y_2\rangle = \arg \langle y_1, y_2\rangle := \theta$$

(resp. 次を満たすスカラー k が存在することである:

$$ky_2 = 2\langle y_1, x\rangle x - y_1).$$

故に、$\arg k = \theta$ と

$$|k| \|y_2\| = \|2\langle y_1, x\rangle x - y_1\| = \|y_1\|$$

つまり、$k = \frac{\|y_1\|}{\|y_2\|}e^{i\theta}$ となることである。

次に、元 x をあるスカラー a, b に対して $x = ay_1 + by_2$ とする。$ky_2 = 2\langle y_1, x\rangle x - y_1 = 2b\langle y_1, x\rangle y_2 + 2a\langle y_1, x\rangle y_1 - y_1$ そして $\{y_1, y_2\}$ が線形独立であるから、

$$2a\langle y_1, x\rangle = 1, \quad 2b\langle y_1, x\rangle = k,$$

よって、$b = ak$ である。それゆえ $x = a(y_1 + ky_2)$、つまり、ある c と $\theta = \arg\langle y_1, y_2\rangle$ に対して $x = c(\|y_2\|\, y_1 + e^{i\theta}\|y_1\|\, y_2)$ となる。

逆は、$x = \|y_2\|\, y_1 + e^{i\theta}\|y_1\|\, y_2$ ($\theta = \arg\langle y_1, y_2\rangle$) ならば、不等式 (BI) での等号が成り立つことから容易にわかる。実際に、次の等式が確認できる:

$$|\langle y_1, x\rangle \langle x, y_2\rangle| = 4\mathcal{B}(y_1, y_2)^2 \|y_1\| \|y_2\|,$$

$$\|x\|^2 = 4\mathcal{B}(y_1, y_2) \|y_1\| \|y_2\|.$$

$\{y_1, y_2\}$ が線形従属である場合は、明らかである。 □

次に、Selberg 不等式の等号条件について確認する ([2, Theorem 2] 参照):

Lemma 2.2. $\{z_i; i = 1, 2, \ldots, n\}$ を互いに直行しない $\mathscr{H}$ の 0 でない元とする。このとき、等式

$$\sum_i \frac{|\langle x, z_i\rangle^2|}{\sum_j |\langle z_i, z_j\rangle|} = \|x\|^2$$

が $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ必要十分条件は、任意の i, j に対して $\langle a_i z_i, a_j z_j\rangle \geq 0$、$|a_i| = |a_j|$ となるスカラー $a_1, \cdots, a_n$ に対して $x = \sum a_i z_i$ を満たすものが存在することである。

次に、Selberg 不等式と Buzano 不等式の同時拡張について考察する。

Theorem 2.3. $y_1, y_2 \in \mathscr{H}$ が与えられた 0 でない元 $\{z_i; i = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathscr{H}$ に対して $\langle y_k, z_i\rangle = 0$ $(k = 1, 2)$ を満たすとき

$$|\langle x, y_1\rangle \langle x, y_2\rangle| + \mathcal{B}(y_1, y_2) \sum_i \frac{|\langle x, z_i\rangle^2|}{\sum_j |\langle z_i, z_j\rangle|} \leq \mathcal{B}(y_1, y_2) \|x\|^2 \tag{2.1}$$

が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。

更に、この不等式において等号が成り立つ必要十分条件は、x_1 (*resp.* x_2) が *Lemma 2.1* (*resp. Lemma 2.2*) での (BI) (*resp.*(SI)) の等号条件を満たし $x = x_1 \oplus x_2$ となることである。

Proof. $a_i := \frac{\langle x, z_i\rangle}{\sum_j |\langle z_i, z_j\rangle|}$, $u := x - \sum_i a_i z_i$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \left\| x - \sum_i a_i z_i \right\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_i \bar{a}_i \langle x, z_i\rangle + \left\| \sum_i a_i z_i \right\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 - 2 \sum_i \frac{|\langle x, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j\rangle|} + \sum_{i,j} |a_i||a_j| \, |\langle z_i, z_j\rangle| \\
&\leq \|x\|^2 - 2 \sum_i \frac{|\langle x, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j\rangle|} + \sum_i |a_i|^2 \sum_j |\langle z_i, z_j\rangle|
\end{aligned}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_i \frac{\left|\langle x, z_i\rangle^2\right|}{\sum_j |\langle z_i, z_j\rangle|}.$$

両辺に $\mathcal{B}(y_1, y_2)$ を乗じると、Buzano 不等式により

$$\mathcal{B}(y_1, y_2)\left(\|x\|^2 - \sum_i \frac{|\langle x, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j\rangle|}\right) \geq \mathcal{B}(y_1, y_2)\|u\|^2$$
$$\geq |\langle u, y_1\rangle\langle u, y_2\rangle| = |\langle x, y_1\rangle\langle x, y_2\rangle|,$$

よって、不等式 (2.1) が得られる。

等号条件は、Lemmas 2.1 と 2.2 により明らかである。 □

3. 一般化

古田 [6, Theorem 2] は、次の Selberg 不等式の拡張を示した : T を $\mathscr{H}$ 上の作用素、その核を $\ker(T)$ とする。このとき、与えられた $z_i \notin \ker(T^*)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対して

$$\sum_i \frac{|\langle Tx, z_i\rangle|}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j\rangle|} \leq \||T|^\alpha x\|^2 \tag{3.1}$$

が、任意の $x \in \mathscr{H}$ と $\alpha \in [0,1]$ に対して成り立つ。

Corollary 3.1. $T = U|T|$ を $\mathscr{H}$ 上の作用素 T の極分解とし、$z_i \notin \ker(T^*)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$、$\alpha \in [0,1]$ とする。このとき、$\langle U|T|^{1-\alpha} y_k, z_i\rangle = 0$ $(k = 1, 2$、$i = 1, 2, \ldots, n)$ であれば

$$|\langle |T|^\alpha x, y_1\rangle\langle |T|^\alpha x, y_2\rangle| + \mathcal{B}(y_1, y_2)\sum_i \frac{|\langle Tx, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j\rangle|} \leq \mathcal{B}(y_1, y_2)\||T|^\alpha x\|^2 \tag{3.2}$$

が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。

Proof. Theorem 2.3 において x, z_i をそれぞれ $|T|^\alpha x$, $|T|^{1-\alpha} U^* z_i$ に置き換えればよい。このとき、直交条件は満たされる。 □

次に、(3.1) に関して別の改良を提案する:

Corollary 3.2. $T = U|T|$ を $\mathscr{H}$ 上の作用素 T の極分解とし、$z_i \notin \ker(T^*)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$、$\alpha, \beta \geq 0$ は、$\alpha + \beta \geq 1 \geq \alpha$ と満たすとする。このとき、$k = 1, 2$、$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\left\langle |T^*|^{\beta+1-\alpha} y_k, z_i\right\rangle = 0$ ならば

$$\left|\left\langle T|T|^{\alpha+\beta-1} x, y_1\right\rangle\left\langle T|T|^{\alpha+\beta-1} x, y_2\right\rangle\right| + \mathcal{B}\left(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2\right)\sum_i \frac{|\langle Tx, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j\rangle|}$$
$$\leq \mathcal{B}\left(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2\right)\||T|^\alpha x\|^2.$$

が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。特に、$\alpha \in [0,1]$ に対して $\left\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} y_k, z_i\right\rangle = 0$ $(k = 1, 2$、$i = 1, 2, \ldots, n)$ ならば

$$|\langle Tx, y_1\rangle\langle Tx, y_2\rangle| + \mathcal{B}\left(|T^*|^{(1-\alpha)} y_1, |T^*|^{1-\alpha} y_2\right)\sum_i \frac{|\langle Tx, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j\rangle|}$$

$$\leq \mathcal{B}\left(|T^*|^{1-\alpha}y_1, |T^*|^{1-\alpha}y_2\right) \||T|^\alpha x\|^2$$

が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。

Proof. Theorem 2.3 において x, z_i, y_k をそれぞれ $|T|^\alpha x, |T|^{1-\alpha}U^* z_i, U^*|T^*|^\beta y_k$ に置き換えればよい。直交条件は、次により満たされる:

$$\left\langle |T^*|^\beta y_k, |T^*|^{1-\alpha} z_i \right\rangle = \left\langle |T^*|^{\beta+1-\alpha} y_k, z_i \right\rangle = 0.$$

□

Corollary 3.3. $T = U|T|$ を $\mathscr{H}$ 上の作用素 T の極分解とし、$z_i \notin \ker(T)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$、$\alpha, \beta \geq 0$ は、$\alpha + \beta \geq 1$ と満たすとする。このとき、$\left\langle T|T|^{\alpha+\beta-1} z_i, y_k \right\rangle = 0$ $(k = 1, 2$、$i = 1, 2, \ldots, n)$ ならば、

$$\left|\left\langle T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y_1\right\rangle \left\langle T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y_2\right\rangle\right| + \mathcal{B}\left(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2\right) \sum_i \frac{\left|\left\langle |T|^{2\alpha}x, z_i\right\rangle\right|^2}{\sum_j \left|\left\langle |T|^{2\alpha} z_i, z_j\right\rangle\right|}$$

$$\leq \mathcal{B}\left(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2\right) \||T|^\alpha x\|^2$$

が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。

Proof. Theorem 2.3 において x, z_i, y_k をそれぞれ $U|T|^\alpha x, U|T|^\alpha z_i, |T^*|^\beta y_k$ に置き換えればよい。直交条件が満たされ、その結果、不等式が得られる。 □

4. Extensions of Heinz-Kato-Furuta 不等式

[6] で古田は、Heinz-Kato 不等式を拡張し、次の不等式を示した:

Heiz-Kato-Furuta 不等式. A と B を $\mathscr{H}$ 上の正作用素とする。T が $T^*T \leq A^2$ と $TT^* \leq B^2$ を満たすとき、

$$\left|\left\langle T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y\right\rangle\right| \leq \|A^\alpha x\| \left\|B^\beta y\right\|$$

が任意の $x, y \in \mathscr{H}$ と $\alpha + \beta \geq 1$ を満たす $\alpha, \beta \in [0, 1]$ に対して成り立つ。加えて、A と B が逆作用素ならば、条件 $\alpha + \beta \geq 1$ を必要としない。

更に、この不等式は、Selberg 不等式に絡んで様々な拡張がなされている。本章では、前章の結果を適用することにより、Heinz-Kata-Furuta 不等式の新たな拡張を提示したい。そのために次の補題を用意する:

Lemma 4.1. ある $B \geq 0$ が $TT^* \leq B^2$ を満たしているならば、$\beta \in [0, 1]$ に対して

$$\mathcal{B}\left(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2\right) \leq \left\|B^\beta y_1\right\| \left\|B^\beta y_2\right\|$$

が任意の $y_1, y_2 \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。

Proof. Löwner-Heinz 不等式により

$$|T^*|^{2\beta} \leq B^{2\beta} \quad \text{for } \beta \in [0, 1]$$

なので、$\left\||T^*|^\beta y\right\| \leq \left\|B^\beta y\right\|$ が任意の $y \in \mathscr{H}$ に対して満たされる。よって、

$$\mathcal{B}\left(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2\right) \leq \left\||T^*|^\beta y_1\right\| \left\||T^*|^\beta y_2\right\| \leq \left\|B^\beta y_1\right\| \left\|B^\beta y_2\right\|.$$

□

初めに、次の結果は、Corollary 3.1 と Löwner-Heinz 不等式から導かれる:

Corollary 4.2. $T = U|T|$ を $\mathscr{H}$ 上の作用素 T の極分解とし、$z_i \notin \ker(T^*)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$、$\alpha \in [0,1]$ とする。正作用素 A が $T^*T \le A^2$ を満たし、$k = 1, 2$、$i = 1, 2, \dots, n$ に対して $\langle U|T|^{1-\alpha} y_k, z_i \rangle = 0$ ならば、

$$|\langle |T|^{\alpha} x, y_1\rangle \langle |T|^{\alpha} x, y_2\rangle| + \mathcal{B}(y_1, y_2) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha) z_i}, z_j\rangle|} \le \mathcal{B}(y_1, y_2) \|A^{\alpha} x\|^2 \tag{4.1}$$

が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。

更に、次の不等式は、Corollary 3.2 と Lemma 4.1 から導かれる:

Corollary 4.3. $T = U|T|$ を $\mathscr{H}$ 上の作用素 T の極分解とする。$z_i \notin \ker(T^*)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$、$\alpha, \beta \in [0,1]$ は $\alpha + \beta \ge 1$ を満たすとする。作用素 $A, B \ge 0$ が $T^*T \le A^2$ と $TT^* \le B^2$ を満たし、$k = 1, 2$、$i = 1, 2, \dots, n$ に対して $\left\langle |T^*|^{\beta+1-\alpha} y_k, z_i \right\rangle = 0$ ならば、

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle T|T|^{\alpha+\beta-1} x, y_1\right\rangle \left\langle T|T|^{\alpha+\beta-1} x, y_2\right\rangle\right| + \mathcal{B}\left(|T^*|^{\beta} y_1, |T^*|^{\beta} y_2\right) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j\rangle|} \\ &\le \left\|B^{\beta} y_1\right\| \left\|B^{\beta} y_2\right\| \|A^{\alpha} x\|^2\end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。特に、$\alpha \in [0,1]$ に対して $\left\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} y_k, z_i \right\rangle = 0$ ならば、

$$\begin{aligned}&|\langle Tx, y_1\rangle \langle Tx, y_2\rangle| + \mathcal{B}\left(|T^*|^{(1-\alpha)} y_1, |T^*|^{1-\alpha} y_2\right) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j\rangle|} \\ &\le \left\|B^{1-\alpha} y_1\right\| \left\|B^{1-\alpha} y_2\right\| \|A^{\alpha} x\|^2\end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。

更に、次の不等式は、Corollary 3.3 と Lemma 4.1 から導かれる:

Corollary 4.4. $T = U|T|$ を $\mathscr{H}$ 上の作用素 T の極分解とする。$z_i \notin \ker(T^*)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$、$\alpha, \beta \ge 0$ は、$\alpha + \beta \ge 1$ と満たすとする。作用素 $A, B \ge 0$ が $T^*T \le A^2$ と $TT^* \le B^2$ を満たし、$k = 1, 2$、$i = 1, 2, \dots, n$ に対して $\left\langle T|T|^{\alpha+\beta-1} z_i, y_k \right\rangle = 0$ ならば、

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle T|T|^{\alpha+\beta-1} x, y_1\right\rangle \left\langle T|T|^{\alpha+\beta-1} x, y_2\right\rangle\right| + \mathcal{B}\left(|T^*|^{\beta} y_1, |T^*|^{\beta} y_2\right) \sum_i \frac{|\langle |T|^{2\alpha} x, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle |T|^{2\alpha} z_i, z_j\rangle|} \\ &\le \left\|B^{\beta} y_1\right\| \left\|B^{\beta} y_2\right\| \|A^{\alpha} x\|^2\end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。

5. Furuta 不等式の応用

Heinz-Kato-Furuta 不等式の更なる拡張を与えるために、次の Furuta 不等式 ([4], [1], [5], [7]) を適用する:

Furuta 不等式. $A \geq B \geq 0$ ならば、任意の $r \geq 0$ に対して

$$(A^r A^p A^r)^{1/q} \geq (A^r B^p A^r)^{1/q},$$
$$(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq (B^r B^p B^r)^{1/q}$$

が、$(1+2r)q \geq p+2r$ を満たす $p \geq 0$ と $q \geq 1$ に対して成り立つ。

次の結果は、Corollary 3.2 の更なる拡張である:

Theorem 5.1. A, B を $\mathscr{H}$ 上の正作用素とし、T を $T^*T \leq A^2$ を満たす作用素とする。このとき、任意の $r, s \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} & |\langle T|T|^{(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta-1}x, y_1\rangle \langle T|T|^{(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta-1}x, y_2\rangle| \\ & + \mathcal{B}\left(|T^*|^{(1+2s)\beta}y_1, |T^*|^{(1+2s)\beta}y_2\right) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i\rangle|^2}{\sum_j \langle |T^*|^{2(1-\alpha-2r\alpha)}z_i, z_j\rangle} \\ & \leq \mathcal{B}\left(|T^*|^{(1+2s)\beta}y_1, |T^*|^{(1+2s)\beta}y_2\right) \left\langle (|T|^{2r}A^{2p}|T|^{2r})^{\frac{(1+2r)\alpha}{p+2r}}x, x\right\rangle \end{aligned} \tag{5.1}$$

が任意の $p, q \geq 1$、$(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta \geq 1 \geq (1+2r)\alpha$ を満たす $\alpha, \beta \in [0,1]$、$z_i \notin \ker(T^*)$ と $\langle |T^*|^{(1+2s)\beta+1-(1+2r)\alpha}y_k, z_i\rangle = 0$ を満たす $x, y_k, z_i \in \mathscr{H}$ $(k=1,2$、$i=1,\cdots,n)$ に対して成り立つ。

Proof. Corollary 3.2 において、α (resp. β) を $\alpha_1 = (1+2r)\alpha$ (resp. $\beta_1 = (1+2s)\beta$) に置き換えることにより

$$\begin{aligned} & |\langle T|T|^{\alpha_1+\beta_1-1}x, y_1\rangle \langle T|T|^{\alpha_1+\beta_1-1}x, y_2\rangle| + \mathcal{B}\left(|T^*|^{\beta_1}y_1, |T^*|^{\beta_1}y_2\right) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha_1)}z_i, z_j\rangle|} \\ & \leq \mathcal{B}\left(|T^*|^{\beta_1}y_1, |T^*|^{\beta_1}y_2\right) \langle |T|^{2\alpha_1}x, x\rangle \end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。次に、$|T|^2 \leq A^2$ と $q = \frac{p+2r}{(1+2r)\alpha}$ に対して、Furuta 不等式を適用することにより

$$|T|^{2\alpha_1} = |T|^{2(1+2r)\alpha} \leq (|T|^{2r}A^{2p}|T|^{2r})^{\frac{(1+2r)\alpha}{p+2r}}.$$

これらより、不等式 (5.1) が得られる。 □

同様に、Corollary 3.3 により次の更なる拡張が導かれる:

Theorem 5.2. A, B を $\mathscr{H}$ 上の正作用素とし、T を $T^*T \leq A^2$ を満たす作用素とする。このとき、任意の $r, s \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} & |\langle T|T|^{(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta-1}x, y_1\rangle \langle T|T|^{(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta-1}x, y_2\rangle| \\ & + \mathcal{B}\left(|T^*|^{(1+2s)\beta}y_1, |T^*|^{(1+2s)\beta}y_2\right) \sum_i \frac{|\langle |T|^{2(1+2r)\alpha}x, z_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle |T|^{2(1+2r)\alpha}z_i, z_j\rangle|} \\ & \leq \mathcal{B}\left(|T^*|^{(1+2s)\beta}y_1, |T^*|^{(1+2s)\beta}y_2\right) \left\langle (|T|^{2r}A^{2p}|T|^{2r})^{\frac{(1+2r)\alpha}{p+2r}}x, x\right\rangle \end{aligned} \tag{5.2}$$

が任意の $p,q\geq 1$、$(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta\geq 1$ を満たす $\alpha,\beta\in[0,1]$、$z_i\notin\ker(T)$ と $\langle T|T|^{(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta-1}z_i,y_k\rangle=0$ を満たす $x,y_k,z_j\in\mathscr{H}$ $(k=1,2$、$i=1,\cdots,n)$ に対して成り立つ。

Proof. Corollary 3.3 において、α (resp. β) を $\alpha_1=(1+2r)\alpha$ (resp. $\beta_1=(1+2s)\beta$) に置き換えることにより

$$\left|\left\langle T|T|^{\alpha_1+\beta_1-1}x,y_1\right\rangle\left\langle T|T|^{\alpha_1+\beta_1-1}x,y_2\right\rangle\right|+\mathcal{B}\left(|T^*|^{\beta_1}y_1,|T^*|^{\beta_1}y_2\right)\sum_i\frac{|\langle|T|^{2\alpha_1}x,z_i\rangle|^2}{\sum_j|\langle|T|^{2\alpha_1}z_i,z_j\rangle|}$$

$$\leq\mathcal{B}\left(|T^*|^{\beta_1}y_1,|T^*|^{\beta_1}y_2\right)\left\langle|T|^{2\alpha_1}x,x\right\rangle.$$

$|T|^2\leq A^2$ に対して、Furuta 不等式を適用することにより

$$|T|^{2\alpha_1}=|T|^{2(1+2r)\alpha}\leq(|T|^{2r}A^{2p}|T|^{2r})^{\frac{(1+2r)\alpha}{+2r}}.$$

これらより、不等式 (5.2) が得られる。 □

References

[1] M. Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator theory **23**(1990), 67–72.

[2] M. Fujii, K. Kubo and S. Otani, *A graph theoretic observation on the Selberg inequality*, Math. Japon., **35**(1990), 381–385.

[3] M. Fujii and R. Nakamoto, *Simultaneous extensions of Selberg inequality and Heinz-Kato-Furuta inequality*, Nihonkai Math. J. **9**(1998), 219–225.

[4] T. Furuta, *$A\geq B\geq 0$ assures $(B^rA^pB^r)^{1/q}\geq B^{(p+2r)/q}$ for $r\geq 0$, $p\geq 0,q\geq 1$ with $(1+2r)q\geq p+2r$*, Proc. Amer. Math. Soc., **101**(1987), 85-88.

[5] T. Furuta, *Elementary proof of an order preserving inequality*,Proc. Japan Acad., **65**(1989), 126.

[6] T. Furuta, *When does the equality of a generalized Selberg inequality hold?*, Nihonkai Math. J. **2**(1991), 25–29.

[7] E. Kamei, *A satelite to Furuta's inequality*, Math. Japon., **33**(1988), 883-886.

[8] K. Kubo and F. Kubo, *Diagonal matrix dominates a positive semidefinite matrix and Selberg's inequality*, preprint.